ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 44, No. 1, 1983

SYMETRIES ISOMETRIQUES APPLICATIONS A LA DUALITE DES ESPACES RETICULES

PAR
GILLES GODEFROY

ABSTRACT

We show that if E is a non-reflexive Banach lattice, there exists for every n a dual of finite even order of E which contains isometically l_n^1. We show the analogous result for l_n^∞ when E is not weakly sequentially compact. We show that if E is a Banach lattice which is isometric to the dual of a Banach space X, then the order intervals are $\sigma(E, X)$-compact. We prove then that under various conditions, a Banach lattice which is a dual as a Banach space, is a dual as a Banach lattice. In particular, this is true when the predual of E is unique.

Notations

La boule unité d'un espace de Banach E sera notée E_1. La topologie faible sur E est notée ω, la topologie pré-faible sur le dual E' est notée ω^* ou $\sigma(E', E)$ s'il y a ambiguité sur le prédual. Un espace de Banach est dit réticulé ([16], p. 81) si c'est un espace vectoriel réticulé, et si sa norme vérifie $|x| \leqq |y| \Rightarrow \|x\| \leqq \|y\|$. Les espaces de Banach considérés sont réels, de nombreux résultats s'étendent au cas complexe avec des démonstrations identiques. On notera l_n^1, respectivement l_n^∞, l'espace $\mathbf{R}^n$ muni de la norme $\Sigma_{i=1}^n |x_i|$, resp. $\sup_{1 \leq i < n} |x_i|$.

On notera i_X l'injection canonique d'un espace X dans son bidual X'', $\pi_X = i_{X'} \circ (i_x)'$ la projection de X''' sur $i_{X'}(X')$ parallèlement à $i_X(X)^\perp$, et $(i_X)'' : X'' \to X^{(4)}$ la bitransposée de l'injection canonique i_X. On a $\|\pi_X\| = 1$ et $\operatorname{Ker}(i_{X''} - (i_X)'') = i_{X''} \circ i_X(X)$ [5]. Lorsque l'emploi de ces notations ne sera pas indispensable, on identifiera simplement X à un sous-espace de X''.

I. Construction de cubes et d'ortaedres dans les duaux d'ordre élevé

D'après le théorème de James ([11]), tout espace non reflexif E contient pour tout $\varepsilon > 0$ un sous-espace de dimension 2, $(1 + \varepsilon)$-isomorphe à l_2^1. En d'autres

Reçu le 20 mai 1982

termes, si E n'est pas reflexif, il existe un ultrapuissance $E_{\mathcal{U}}$ de E qui contient isométriquement l_2^1. Dans le cas des espaces réticulés, ce résultat peut être précisé. On a en effet

THÉORÈME 1. *Soit E un Banach réticulé non reflexif. Le dual $E^{(6)}$ d'ordre 6 contient un sous-espace isométrique à l_2^1.*

DÉMONSTRATION. Nous dirons qu'un opérateur S d'un espace E dans lui-même est une symétrie si $S^2 = \mathrm{Id}_E$.

LEMME 2. *Soit E un espace de Banach tel qu'il existe une symétrie isométrique S de E'' telle que $\mathrm{Ker}(S - \mathrm{Id}_{E''}) = E$. Alors le dual $E^{(4)}$ d'ordre 4 contient isométriquement l_2^1.*

Ecrivons $E'' = E \oplus F$, avec $F = \mathrm{Ker}(S + \mathrm{Id})$. Soit $x \in F$, de norme 1. Dans l'espace $E^{(4)}$, on a $\pi_{E'}((i_E)''(x)) = i_{E''}(x)$ (cf. par exemple [15]). La projection $\pi_{E'}$ étant de norme 1, on en déduit que le segment $[i_{E''}(x), (i_E)''(x)]$ est contenu dans la sphère unité de $E^{(4)}$. Soit $S'' : E^{(4)} \to E^{(4)}$ la bitransposée de S. On a $\mathrm{Ker}(S'' - \mathrm{Id}_{E^{(4)}}) = (i_E)''(E'')$ puisque $(i_E)''(E'')$ est l'adhérence de $i_{E''} \circ i_E(E)$ dans $(E^{(4)}, \omega^*)$; par conséquent $S''((i_E)''(x)) = (i_E)''(x)$. D'autre part, on a $S''(i_{E''}(x)) = -S''(i_{E''}(x))$ puisque $S(x) = -x$. L'espace engendré par $i_{E''}(x)$ et $(i_E)''(x)$ est donc stable par S''. D'autre part, S est une isométrie; on en déduit que le segment $[-i_{E''}(x), (i_E)''(x)]$ est contenu dans la sphère unité de $E^{(4)}$. La boule unité de $E^{(4)}$ est bien sûr symétrique par rapport à 0. Il est alors clair que l'espace engendré par $i_{E''}(x)$ et $(i_E)''(x)$ est isométrique à l_2^1.

Soit à présent $|||\ \ |||$ une norme réticulée sur $l^1(\mathbf{N})$. Le bidual $(l^1(\mathbf{N})'', |||\ \ |||)$ s'écrit

$$l^{1''}(\mathbf{N}) = l^1(\mathbf{N}) \oplus \mathcal{M}(\beta\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}),$$

l'application $S : l^{1''}(\mathbf{N}) \to l^1(\mathbf{N})$

$$x : x_1 + x_2 \mapsto S(x) = x_1 - x_2$$

est une symétrie telle que $\mathrm{Ker}(S - \mathrm{Id}) = l^1$, et on a $|||\, S(x)\, ||| = |||\, x\, |||$ pour tout x puisque $x_1 \wedge x_2 = 0$ et que la norme $|||\ \ |||$ est réticulée. Par le lemme 2, l'espace $(l^1(\mathbf{N})^{(4)}, |||\ \ |||)$ contient isométriquement l_2^1.

Si E est maintenant réticulé non réflexif, alors ([16], p. 95) E contient un sous-réticulé isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ ou un sous-réticulé isomorphe à $c_0(\mathbf{N})$. Si $E \supseteq l^1(\mathbf{N})$, on a

$$E^{(4)} \supseteq l^1(\mathbf{N})^{(4)} \supseteq l_2^1$$

donc à fortiori $E^{(6)} \supseteq l_2^1$ isométriquement. Si $E \supseteq c_0(\mathbf{N})$, alors $l^1(\mathbf{N})$ est quotient de E', donc $l^1(\mathbf{N})^{(4)}$ est quotient de $E^{(5)}$. Mais l'espace l_2^1 est injectif, donc

$$\exists \pi : l^1(\mathbf{N})^{(4)} \to l_2^1, \qquad \|\pi\| = 1.$$

Par conséquent, l_2^1 est isométrique à un quotient de $E^{(5)}$, donc $(l_2^1)'$ est isométrique à un sous-espace de $E^{(6)}$; et $(l_2^1)' = l_2^\infty$ est isométrique à l_2^1. C.Q.F.D.

REMARQUES. (1) Il est montré dans [7] que s'il existe une symétrie isométrique S de E'' avec $\operatorname{Ker}(S - \mathrm{Id}) = E$, alors E est faiblement séquentiellement complet. Si E est supposé réticulé, on a une caractérisation des f.s.c. réticulés.

(2) Pour tout espace de Banach, soit $\alpha(E)$ défini par

$$\alpha(E) = \inf\{n \in \mathbf{N} \mid E^{(n)} \supseteq l_2^1 \text{ isométriquement}\}.$$

L'espace l_2^1 étant injectif, on a comme ci-dessus $E^{(k)} \supseteq l_2^1$ pour tout $k \geqq \alpha(E)$. Un adaptation de la démonstration ci-dessus permet de montrer que si E est réticulé non reflexif, on a $\alpha(E) \leqq 5$. Néanmoins, nous avons énoncé le résultat pour $E^{(6)}$ afin d'avoir un espace qui soit finiment représentable dans E. Notons d'autre part que la norme $|||\ \ |||$ sur $c_0(\mathbf{N})$ définie par

$$|||(u_n)||| = \|u_n\|_\infty + \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \cdot |u_n|^2\right)^{1/2}$$

est une norme réticulée telle que $(l^\infty, |||\ \ |||)$ soit strictement convexe; on a donc dans ce cas $\alpha(E) \geqq 3$. La valeur maximale de $\alpha(E)$ pour E réticulé non réflexif est donc 3,4 ou 5; cette valeur reste à déterminer.

Ce premier théorème peut être précisé et étendu. Il est bien connu, et facile de démontrer, que tout Banach réticulé B-convexe est réflexif. Montrons qu'on a plus précisément

THÉORÈME 3. *Soit E un espace de Banach réticulé faiblement séquentiellement complet non réflexif. Alors le dual $E^{(2n)}$ d'ordre $2n$ contient un sous-réticulé isométrique à l_n^1.*

Soit E un espace de Banach réticulé non f.s.c. *Alors l'espace $E^{(2n+2)}$ contient un sous-réticulé isométrique à l_n^∞.*

DÉMONSTRATION. Précisons quelques notations. On note $E^{(0)}$ l'espace $l^1(\mathbf{N})$ et $E^{(k)}$ son dual d'ordre k. Soit

$$i_n : E^{(2n)} \to E^{(2n+2)}$$

l'injection canonique, et

$$i''_n : E^{(2n+2)} \to E^{(2n+4)}$$

sa bitransposée. On note $(E^{(2n)})_e$ la bande étrangère à $E^{(2n)}$ dans $E^{(2n+2)}$. On a donc

$$E^{(2n+2)} = E^{(2n)} \oplus (E^{(2n)})_e.$$

Enfin, on note

$$\pi_n : E^{(2n+4)} \to E^{(2n+2)}$$

la projection parallèlement à $(E^{(2n+1)})^\perp$.

L'espace l^1 est muni d'une norme réticulée pour l'ordre usuel, que nous notons simplement $\|\cdot\|$.

LEMME 4. *Soit* $x \in (E^{(0)})_e = (l^1)_e$. *On pose*

$$\begin{cases} x_0 = x, \\ x_n = (i_{n-1})''(x_{n-1}). \end{cases}$$

on a $x_n \in (E^{(2n)})_e$ *pour tout* n.

DÉMONSTRATION. Montrons que $x_1 = (i_0)''(x)$ appartient à $(E^{(2)})_e$. On peut supposer $x \geqq 0$ et $\|x\| = 1$. L'hypothèse $x \in (E)_e$ équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists y_n \in E'_+ \quad \text{t.q.}$$

$$\begin{cases} y_n \geqq y_{n+1} & \forall n, \\ \inf_{E'} y_n = 0, \\ \langle x, y_n \rangle > 1 - \varepsilon & \forall n. \end{cases}$$

Soit $\pi : E'' \to E$ la projection parallèlement à $(E)_e$. On pose $y'_n = \pi'(y_n)$. On a $y'_n \in E'''$, et

$$\begin{cases} y'_n = y_n & \text{sur } E \Leftrightarrow y_n = i'_0(y'_n), \\ y'_n = 0 & \text{sur } E_e. \end{cases}$$

On en déduit que $\inf_{E'''} y'_n = 0$. D'autre part

$$\langle i''_0(x), y'_n \rangle = \langle x, (i_0)'(y'_n) \rangle = \langle x, y_n \rangle$$

d'où $\langle x_1, y'_n \rangle > 1 - \varepsilon$ pour tout n; il est alors clair que $x_1 \in (E^{(2)})_e$. Il suffit alors de raisonner par récurrence pour voir que $x_n \in (E^{(2n)})_e$ pour tout n. C.Q.F.D.

Remarquons à présent qu'on a pour tout n

$$\pi_n(x_{n+1}) = x_n.$$

Les projections π_n sont de norme 1. On en déduit $\forall \lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}^+$

$$\left\| \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i \right\| \geqq \left\| \pi_n \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i \right) \right\| = \left\| \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i x_i + x_{n-1}(\lambda_n + \lambda_{n-1}) \right\|,$$

$$\left\| \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i \right\| \geqq \left\| \pi_{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i x_i \right) + (\lambda_n + \lambda_{n-1}) \pi_{n-1}(x_{n-1}) \right\|$$

$$= \left\| \sum_{i=0}^{n-3} \lambda_i x_i + (\lambda_n + \lambda_{n-1} + \lambda_{n-2}) x_{n-2} \right\|$$

et en poursuivant par induction

$$\left\| \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i \right\| \geqq \left\| \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \right) x_0 \right\| = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i$$

d'où

$$\forall \lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}^+ \qquad \left\| \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i \right\| = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i.$$

Considérons maintenant pour $0 \leqq k \leqq n$ la symétrie S_k de $E^{(2n+2)}$ défini par

$$\begin{cases} S_k = -\mathrm{Id} \text{ sur } (E^{(2k)})_e \\ S_k = \mathrm{Id} \text{ sur } E^{(2k)} \oplus E^{(2k+4)} \oplus \cdots \oplus E^{(2n+2)} \end{cases}$$

on a $S_k(x_k) = -x_k$ et $S_k(x_i) = x_i$ si $i \neq k$. Les symétries S_k sont des symétries de bande, les espaces $E^{(i)}$ sont des espaces réticulés, donc les S_k sont des isométries. On en déduit que

$$\forall (\lambda_i) \in \mathbf{R} \qquad \left\| \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i \right\| = \sum_{i=0}^{n} |\lambda_i|$$

donc l'espace F_n engendré par $x_0, x_1, \cdots, x_n$ est un sous-espace de $E^{(2n+2)}$ isométrique à l^1_{n+1}. Remarquons de plus que les (x_i) étant positifs et étrangers 2 à 2, l'espace F_n est un sous-réticulé de $E^{(2n+2)}$. Enfin, si X est réticulé f.s.c. non reflexif, alors X contient un sous-réticulé isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ munie de son ordre usuel ([16], p. 95); ce qui précède montre alors que $X^{(2n)}$ contient isométriquement l^1_n comme sous réticulé.

Soit à présent E réticulé non f.s.c.; E contient alors un sous-réticulé isomorphe à $c_0(\mathbf{N})$ ([16], p. 95). Il suffit donc de démontrer notre résultat pour $c_0(\mathbf{N})$ muni d'une norme réticulée équivalente.

Pour cela, considérons $l^1(\mathbf{N})$ muni de la norme réticulée duale et commençons la construction des l^1_n ci-dessus en choisissant pour x_0 un atome de $(l^1)_e$, soit

$x_0 = \varepsilon_{\mathcal{U}}/\|\varepsilon_{\mathcal{U}}\|$, où $\varepsilon_{\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} x_n$, pour $\mathcal{U}$ ultrafiltre non trivial sur $\mathbf{N}$. Alors $x_1 = (i_0)''(x_0)$ est un atome de $(E^{(2)})_e$. En effet, il faut montrer que

$$(i_0)''(x_0)(f \vee g) = (i_0)''(x_0)(f) \vee (i_0)''(x_0)(g)$$

pour tout $f, g \in E'''$. Or la projection $i_0' : E''' \to E'$ est un morphisme d'espace réticulé; en effet $\operatorname{Ker} i_0' = i_0(E)^{\perp}$ est l'orthogonal d'une bande de E'', donc une bande et en particulier un idéal. On a alors

$$\begin{aligned}(i_0)''(x_0)(f \vee g) &= x_0(i_0'(f \vee g)) \\ &= x_0(i_0'(f) \vee i_0'(g)) \\ &= x_0(i_0'(f)) \vee x_0(i_0'(g)) \\ &= (i_0)''(x_0)(f) \vee (i_0)''(x_0)(g).\end{aligned}$$

Il est alors clair par récurrence que pour tout n, x_n est un atome de $(E^{(2n)})_e$. L'espace F_n est alors une *bande* de $E^{(2n+2)}$. Soit alors $\pi : E^{(2n+2)} \to F_n$ la projection de bande; l'espace $\pi'(F_n')$ est un sous-réticulé de $E^{(2n+3)}$ isométrique à l_{n+1}^{∞}, et on a $E^{(2n+3)} = (c_0(\mathbf{N}))^{(2n+4)}$. C.Q.F.D.

Remarques. (1) La démonstration faite permet d'étendre immédiatement le résultat au dual d'ordre $\aleph_0$; plus précisément, si E est réticulé f.s.c. non réflexif — respectivement E non f.s.c. — alors $E(\aleph_0)$ contient un sous-réticulé isométrique à $l^1(\mathbf{N})$ — respectivement à $c_0(\mathbf{N})$.

(2) Par le principe de reflexivité locale ([12], p. 196) et le fait que les L-espaces sont contractivement complémentés dans tout réticulé ([16], p. 120) on déduit du théorème 3: Soit E un Banach réticulé f.s.c. non réflexif; alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $X \subseteq E$ de dimension n, tel que (1) $d(X, l_n^1) < 1 + \varepsilon$, (2) $\exists \pi : X \to E$ projection de norme $\|\pi\| < 1 + \varepsilon$. L'exemple de $l^1(\mathbf{N})$ muni d'une norme réticulée strictement convexe montre qu'on ne peut faire $\varepsilon = 0$ ci-dessus.

Les méthodes employées ci-dessus s'appliquent également à des Banach plus généraux. Notons S_L la symétie de $\mathbf{R}^2$ muni de la norme $\|xl_1 + yl_2\| = |x| + |y|$ définie par $S_L(xl_1 + yl_2) = xl_1 - yl_2$. Si E est un espace de Banach tel qu'il existe une symétrie isométrique S de E'' telle que $\operatorname{Ker}(S - \mathrm{Id}) = E$, alors S_L est finiment représentable dans S. On a plus précisément

Lemme 5. *Soit E un espace de Banach tel qu'il existe une projection $\pi : E'' \to E$ telle que $\|x - y\| = \|x + y\|$ pour tout $x \in E$ et tout $y \in \operatorname{Ker} \pi$. Alors pour tout $y \in \operatorname{Ker} \pi$, $\|y\| = 1$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ de norme 1 tel que*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \qquad (1 - \varepsilon)(|\lambda| + |\mu|) \leqq \|\lambda x + \mu y\| \leqq |\lambda| + |\mu|.$$

DÉMONSTRATION. Soit $y \in \operatorname{Ker} \pi, \|y\| = 1$. L'application $S = 2\pi - 1$ est une symétrie isométrique. D'après la démonstration du lemme 2, le sous-espace V_y de $E^{(4)}$ engendré par y et $(i_E)''(y)$ est isométrique à l_2^1, et on a

$$\|y - (i_E)''(y)\| = \|y + (i_E)''(y)\| = 2.$$

Soit (x_α) un ensemble filtrant dans E_1 tel que

$$y = \lim_{\mathcal{U}} x_\alpha \qquad \text{dans } (E'', \omega^*).$$

Il est facile à voir que

$$(i_E)''(y) = \lim_{\mathcal{U}} x_\alpha \qquad \text{dans } (E^{(4)}, \omega^*).$$

La norme duale sur $E^{(4)}$ étant ω^*-s.c.i., on en déduit

$$\lim_{\mathcal{U}} \|y - x_\alpha\| \geqq \|y - (i_E)''(y)\| = 2,$$

$$\lim_{\mathcal{U}} \|y + x_\alpha\| \geqq \|y + (i_E)''(y)\| = 2.$$

Par conséquent, pour tout ε, il existe $x_\varepsilon \in E_1$ tel que

$$\|y - x_\varepsilon\| > 2 - \varepsilon, \qquad \|y + x_\varepsilon\| > 2 - \varepsilon.$$

Il est facile d'en déduire que l'espace engendré par y et x_ε est "presque" l_2^1, d'où le lemme. C.Q.F.D.

Déduisons de ce lemme le résultat suivant, que montre le rôle particulier tenu par les L-projections.

THÉORÈME 6. *Soit E un espace de Banach non réflexif. On suppose qu'il existe une projection $\pi: E'' \to E$, et une fonction $\varphi: \mathbf{R}_+^2 \to \mathbf{R}$ telle que $\|x\| = \varphi(\|\pi x\|, \|x - \pi x\|)$ pour tout $x \in E''$. Alors on a $\varphi(t, u) = t + u$ pour tout $(t, u) \in \mathbf{R}_+^2$.*

DÉMONSTRATION. Soit $y \in \operatorname{Ker} \pi$, $\|y\| = 1$. L'existence de la fonction φ montre que les hypothèses du lemme 5 sont vérifiées. Soit $\varepsilon > 0$, et $x_\varepsilon \in E$. $\|x_\varepsilon\| = 1$, tel que

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R} \qquad (1 - \varepsilon)(|\lambda| + |\mu|) \leqq \|\lambda x_\varepsilon + \mu y\| \leqq |\lambda| + |\mu|.$$

On a

$$\|\lambda y + \mu x_\varepsilon\| = \varphi(\|\mu x_\varepsilon\|, \|\lambda y\|) = \varphi(|\mu|, |\lambda|)$$

d'où

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R} \qquad (1-\varepsilon)(|\lambda|+|\mu|) \leqq \varphi(|\mu|,|\lambda|) \leqq |\lambda|+|\mu|.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, la conclusion s'ensuit. C.Q.F.D.

On sait (voir [2]) que toute L^p-projection ($1 < p \leqq \infty$) dans un espace dual est ω^*-ω^*-continue. On en déduit le théorème 6 dans le cas où φ est supposée de la forme $\varphi(t,u) = (t^p + u^p)^{1/p}$ ($1 \leqq p \leqq \infty$).

Il existe bien sûr des espaces E tels qu'il existe des symétries isométriques S de E'' avec $\operatorname{Ker}(S - \mathrm{Id}) = E$ et qui ne sont pas L-facteurs dans E''; c'est le cas de l'espace $l^1(\mathbf{N})$ muni de la norme

$$\|(u_n)\| = \sup\left(|u_1|, \sum_{n=2}^{+\infty} |u_n|\right).$$

II. Etude des préduaux d'espaces réticules

Il est bien connu que le dual d'un espace réticulé est un espace complètement réticulé pour l'ordre et la norme duale. Il est naturel de se poser la question inverse, à savoir: soit E un espace de Banach réticulé, dual *en tant qu'espace de Banach* de l'espace X. Que peut-on dire de X? Le théorème ci-dessous montre que l'espace X n'est pas tout à fait indépendant de la structure d'ordre.

THÉORÈME 7. *Soit E un espace de Banach réticulé, isométrique au dual d'un espace de Banach X. Alors pour tous $x, y \in E$, $x \leqq y$, l'intervalle d'ordre $[x, y]$ est $\sigma(E,X)$-compact.*

DÉMONSTRATION. L'espace X sera le seul prédual de E considéré dans la démonstration: la topologie $\sigma(E, X)$ sera donc désignée par ω^*. Soit (x_n) une suite décroissante d'éléments de E^+; la suite (x_n) est ω-Cauchy, par conséquent $\lim_{n\to\infty} x_n$ existe dans (E, ω^*).

LEMME 8. *Sous les hypothèses du théorème, soit $(x_n) \in E^+$ une suite décroissante, et $y = \lim_{n\to\infty} x_n$ dans (E, ω^*). Soit $\pi_n : E'' \to E''$ la projection sur la bande engendrée par x_n dans E''. On a $\pi_n(y) = y$ pour tout n.*

D'après [8] (lemme de la démonstration du théorème 8), on a

$$p \leqq q \Rightarrow \|2n(I - \pi_p)|y| + x_q\| \leqq 1 \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

(Nota: la suite (x_n) était supposée dans ce lemme décroissante et d'inf. 0; la démonstration n'utilise cependant que la décroissance.)

On en déduit immédiatement que

$$\forall p \qquad I-\pi_p|y|=0.$$

Soit

$$\forall p\in \mathbf{N} \qquad \pi_p|y|=|y|.$$

Les projections (π_p) étant des projections de bande, ceci est clairement équivalent à $\pi_p(y)=y$ pour tout p. C.Q.F.D.

Montrons à présent que l'espace E est nécessairement complètement réticulé. Soit $x\in E^+$; l'espace $E_x=\bigcup_{n\in \mathbf{N}}[-nx,nx]$ est positivement isométrique à un espace $\mathscr{C}(K_x)$, lorsqu'on le munit de la norme $j_x=$ jauge de $[-x,x]$. Il faut montrer que K_x est un compact stonien.

Montrons tout d'abord que K_x est σ-stonien. Soit 0 un ouvert F_σ de K_x, soit $0=\bigcup_{n\in\mathbf{N}}F_n$. On peut supposer $F_n\subseteq \overset{0}{F}_{n+1}$ pour tout n. Soit $x_n\in\mathscr{C}(K_x)$ tel que (1) $0\leqq x_n\leqq 1$, (2) $x_n=1$ sur F_n, (3) $x_n=0$ sur $\complement 0$.

La suite $(x-x_n)$ est une suite décroissante d'éléments positifs; soit $y=\lim_{\omega^*}(x-x_n)$. On utilise ici la représentation de E comme espace réticulé de fonctions continues numériques sur K_x (voir [16], p. 168). Le lemme 8 permet en effet de se ramener au cas où x est une unité d'ordre faible de E. D'après le lemme 8, on a $y=0$ sur 0. Soit $y_0=x-y=\lim_{\omega^*}x_n$; on a donc $y_0=1$ sur 0. D'autre part, soit 0′ un ouvert de $\mathscr{C}(K_x)$ tel que $\bar{0}'\cap\bar{0}=\varnothing$; il existe $g\in\mathscr{C}(K_x)$ tel que (1) $0\leqq g\leqq 1$, (2) $g=0$ sur $\bar{0}'$, (3) $g=1$ sur $\bar{0}$.

En appliquant le lemme 8 à la suite $(g-x_n)$, on voit que $y_0=0$ sur 0′, et donc que $y_0=0$ sur $\complement\bar{0}$. On a donc montré qu'il existe une fonction continue numérique, à savoir y_0, telle que

$$\begin{cases} y_0=1 & \text{sur } 0 \Rightarrow y_0=1 \text{ sur } \bar{0}\\ y=0 & \text{sur } \complement\bar{0}\end{cases}$$

ce qui montre que $\bar{0}$ est ouvert. Une démonstration analogue (où on remplace les suites (x_n) par des familles d'éléments (x_α)) montre que K_x est stonien. On sait d'autre part ([8], théorème 8) que sous les hypothèses du théorème 7, l'espace X est sous-espace de la bande E'_c des formes linéaires continues en ordre sur E. La bande E'_c sépare donc les points de E, ce qui montre que l'espace $(E'_c)_x=\{f_{|\mathscr{C}(K_x)|}f\in E'_c\}$ vérifie: $U\{\mathrm{supp}(\mu)\,|\,\mu\in(E'_c)_x\}$ dense dans K_x. Or, toute mesure de $(E'_c)_x$ est une mesure normale sur le stonien K_x. Le compact K_x est donc hyperstonien, et la boule unité de $\mathscr{C}(K_x)$, soit $[-x,x]$, est compacte pour la topologie de la convergence simple sur les mesures normales, et donc à fortiori $\sigma(E,E'_c)$-compacte. Mais comme on a $X\subseteq E'_c$, la topologie $\sigma(E,X)$ est moins fine que $\sigma(E,E'_c)$ et donc $[-x,x]$ est $\sigma(E,X)$-compact.

Par translation de vecteur t, on en déduit que si $t \geqq x$, l'intervalle $[x, 2t - x]$ est $\sigma(E,X)$-compact. Enfin, si $y \geqq x$, on a

$$[x,y] = [x, 2(|x| \vee |y|) - x] \cap [-2(|x \vee |y|) - y, y]$$

et donc $[x,y]$ est $\sigma(E,X)$-compact. C.Q.F.D.

Remarques. Exemples. (1) Le théorème 7 permet de retrouver divers résultats employés dans la démonstration, par exemple que E est nécessairement complètement réticulé, et que X est contenu dans l'espace E'_c des formes linéaires continues en ordre sur E. Notons également que si (x_n) est une suite croissante et $y = \sup_n x_n$, on a $y = \lim_{n\to\infty} x_n$ dans (E, ω^*).

(2) Si K est un compact hyperstonien, il existe une unique topologie de convexe compact sur la boule unité de $\mathscr{C}(K)$ [9]; par conséquent, si X_1 et X_2 sont deux préduaux de E, les topologies $\sigma(E, X_1)$ et $\sigma(E, X_2)$ coïncident sur les intervalles d'ordre. D'autre part, toute suite monotone bornée en norme de E est f.i.c. (voir [8], définition 1) donc sa limite préfaible ne dépend pas du prédual ([8), lemme 2). On déduit de ces deux remarques que si X est un prédual de E, si $\pi_X : E'' \to E$ désigne la projection parallèlement à $X^\perp$, et E''_c la bande engendrée par E dans E'', alors les projections π_X coïncident sur E''_c. Si $E''_c = E''$ (i.e. si E' est f.s.c.), on en déduit que E a un unique prédual (un résultat de [8]).

(3) Il faut noter que sous les hypothèses du théorème 7, le cône positif E^+ n'est pas toujours $\sigma(E,X)$-fermé, ainsi que le montre le prédual suivant X de $l^1(\mathrm{N})$ muni de sa norme usuelle

$$X = \left\{ (u_n) \,\middle|\, u_0 = -\lim_{n\to\infty} u_n \right\}.$$

Si (e_n) désigne la base canonique de $l^1(\mathrm{N})$, on a $\lim_{n\to\infty} e_n = -e_0$ dans $(l^1, \sigma(l^1, X))$. Notons que le cône $(l^{1+})^0$ polaire de l^{1+} dans X est réticulé mais n'est pas générateur. En effet $(l^{1+})^0 = \{(u_n) \in X \mid u_0 = \lim_{n\to\infty} u_n = 0\}$. Revenons à notre problème initial. On dira qu'un espace X est *unique prédual* de son dual X' (voir par exemple [6], [7], [8]) si $\pi_X : X''' \to X'$ est l'unique projection $\pi : X''' \to X'$ de norme 1 telle que $\operatorname{Ker} \pi$ soit ω^*-fermé. On a alors

Théorème 9. *Soit E un espace de Banach réticulé, dual d'un espace de Banach X. Si l'espace X est l'unique prédual de E, alors X est réticulé et E est le dual de X pour la norme et pour l'ordre.*

Démonstration. Soit $x \in X$. Il s'agit de montrer que $|x| \in X$, où la valeur absolue de x est pris dans le dual E' de E. Soient $x_1 = x \vee 0$ et $x_2 = -(x \wedge 0)$; on a $x = x_1 - x_2$, $|x| = x_1 + x_2$, et $x_1 \wedge x_2 = 0$. Soit $N(x_1) = \{y \in E \mid x_1(|y|) = 0\}$.

L'élément x_1 est continu en ordre sur E, donc $N(x_1)$ est une bande de E, de plus E est complètement réticulé d'après le théorème 8, donc $N(x_1)$ est une bande complémentée. Soit $\pi : E \to N(x_1)$ la projection de bande, et posons $S = 2\pi - I$. L'application S est une symétrie isométrique de E; l'espace X étant unique prédual, on a $S'(X) = X$ (voir [6]). Or, on a $S'(x) = |x|$ et donc $|x| \in X$.

C.Q.F.D.

Exemples. Si E' est f.s.c. alors le prédual de E est unique ([8]) et par conséquent il est réticulé. Ce résultat était connu (voir par exemple [16], p. 124) dans le cas où $E = \mathscr{C}(K)$ muni de sa norme usuelle; il suffit d'ailleurs dans ce cas de remarquer que E_1^+ est un homothétique de E_1.

Si X a la propriété de Radon–Nikodym, ou si la norme de E est $\mathscr{F}$-différentiable sur un ensemble dense, le théorème s'applique (d'après [6]). On en déduit par exemple que tout espace ayant la propriété de décomposition de Riesz et la propriété de Radon–Nikodym est réticulé (et même dual de réticulé dans le cas E séparable, par un théorème de Talagrand [18]).

Inversement, si S est un simplexe compact, l'espace $\mathscr{A}(S)$ des fonctions affines continues sur S est un espace de Lindenstrauss; mais $\mathscr{A}(S)$ est réticulé si et seulement si $\operatorname{Ext}(S)$ est fermé. Dans ce cas, on n'a jamais unicité du prédual dès que $\dim S = \infty$.

Remarque. Le théorème 8 admet la formulation équivalente suivante: s'il existe une norme équivalente $\| \ \|$ sur X telle que

(1) $(X, \| \ \|)$ soit unique prédual,

(2) la norme duale $\| \ \|'$ soit réticulée,

alors X est réticulé. Si X est séparable, l'ensemble des normes équivalentes telles que $(X, \| \ \|)$ soit unique prédual contient un $\mathscr{G}\,\delta$-dense du metrique complet des normes équivalentes; mais l'ensemble des normes telles que $\| \ \|'$ soit réticulée est maigre en général. On a cependant

Théorème 10. *Soit E un espace de Banach réticulé, isomorphe au dual d'un espace de Banach X tel que E^+ soit $\sigma(E, X)$-fermé. Si X est l'unique prédual de E pour toute norme, alors X est réticulé et E est le dual de X pour la norme et pour l'ordre.*

Démonstration. Soit E_1 la boule unité d'une norme $\sigma(E, X)$ s.c.i. et considérons l'enveloppe solide de E_1, soit

$$C = [(E^+ \cap E_1) - E^+] \cap [(-(E^+) \cap E_1) + E^+].$$

Le cône E^+ étant $\sigma(E, X)$-fermé, C est la boule unité d'une norme $\sigma(E, X)$-s.c.i;

cette norme est d'autre part réticulée. Il suffit alors d'appliquer le théorème 9 à E muni de cette norme. C.Q.F.D.

Notons que E^+ $\sigma(E,X)$ fermé signifie que le cône polaire $(E^+)^0$ est générateur dans X.

EXEMPLES. Si X a la propriété de Radon–Nikodym, on si E' est f.s.c. le théorème s'applique. Sous ces hypothèses, le cône $(E^+)^0$ polaire de E^+ dans X est un cône *réticulé* générateur. Notons qu'il n'est pas réticulé en général, même si E^+ est $\sigma(E,X)$-fermé, comme le montre l'exemple des espaces $A(S)$, où S est simplexe compact avec $\mathrm{Ext}(S)$ non fermé. Le cas extrème est celui de l'espace de Gurarii G ([10]), où on a $\mathrm{Ext}(S) = S$.

Soit B un prédual isomorphique de $l^1(\mathbf{N})$ ayant la propriété de Radon–Nikodym ([3]). L'espace B est unique prédual de son dual pour toute norme ainsi que son dual l^1. En appliquant deux fois le théorème 8, et le fait que $B \not\supset c_0(\mathbf{N})$ on voit qu'il n'existe pas de norme sur B telle que la norme biduale soit réticulée sur $B'' = l^\infty(\mathbf{N})$, et ce pour aucun ordre sur $l^\infty(\mathbf{N})$. L'espace B est un exemple d'espace à structure locale inconditionnelle dont le bidual n'est jamais isométrique à un réticulé. D'autre part, par le théorème 10, le cône positif $(l^1)^+$ n'est pas $\sigma(l^1, B)$-fermé.

Terminons par des conditions suffisantes d'existence de certains préduaux.

PROPOSITION 11. *Soit E un espace de Banach réticulé* f.s.c. *Si la norme de E est Fréchet-différentiable sur un ensemble dense, c'est une norme duale et le prédual X est réticulé avec une norme continue en ordre, et prédual de E pour la norme et pour l'ordre.*

DÉMONSTRATION. Soit E_e la bande étrangère à E dans E''. On a $E'' = E \oplus E_e$, et la projection $\pi : E'' \to E$ parallèlement à E_e est de norme 1. D'après [6], si la norme d'un Banach E est Fréchet-différentiable sur un ensemble dense, l'ensemble

$$R_E = \{x \in E'' \mid \|x - u\| \geqq \|u\| \, \forall u \in E\}$$

est un sous-espace vectoriel ω^*-fermé de E''; on a clairement $E \cap R_E = \{0\}$. On a ici $E_e = \mathrm{Ker}\, \pi \subseteq R_E$, puisque π est de norme 1. Mais $E'' = E \oplus E_e$ et $E \cap R_E = \{0\}$, donc $E_e = R_E$ et E_e est ω^*-fermé. L'espace E est alors isométrique au dual du sous-espace $(E_e) = X$ de E'; ce prédual est réticulé d'après le théorème 8 car il est unique prédual [6]. Enfin, d'après ([14], th. 5) l'espace X a une norme continue en ordre. C.Q.F.D.

On en déduit le

THÉORÈME 12. *Soit E un Banach réticulé* f.s.c. *Les énoncés suivants sont équivalents* :

(1) *E admet un prédual X — pour une norme équivalente et pour l'ordre — réticulé avec une norme continue en ordre.*

(2) *Il existe une norme réticulée sur E, Fréchet-différentiable sur un ensemble dense.*

DÉMONSTRATION. (2) $\Rightarrow$ (1) est immédiat par la proposition 11.

(1) $\Rightarrow$ (2). Soit X prédual de E avec une norme continue en ordre. Il existe alors [4] une norme réticulée sur X localement uniformément convexe. Le théorème de Bishop–Phelps montre alors que la norme duale est Fréchet-différentiable sur un ensemble dense; elle est bien sûr réticulée. C.Q.F.D.

EXEMPLES. Si E est réticulé séparable avec la propriété de Radon–Nikodym, il existe toujours un prédual réticulé [18] mais pas toujours de prédual complètement réticulé [17]; le théorème 12 donne une condition nécessaire et suffisante d'existence du prédual complètement réticulé.

Tout espace E à base inconditionnelle "boundedly complete" vérifie (1) et (2). L'espace X correspondant est alors à base inconditionnelle "shrinking".

Si E vérifie (1) et (2), alors E a la propriété de Radon–Nikodym [14], et toute norme réticulée sur E est la norme duale d'une norme sur X; de plus, toutes les bijections isométriques de E' sont des bitransposées d'isométries de X. Notons d'autre part qu'il existe un unique prédual de E qui soit complètement réticulé.

Soit (u_n) une suite de réels strictement décroissante, avec $u_0 = 2$ et $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$. La norme

$$|||(\lambda_i)||| = \sup_{n\in\mathbf{N}} \left(u_n \sum_{i=0}^{n} |\lambda_i| \right)$$

est une norme équivalente réticulée sur $l^1(\mathbf{N})$, et Fréchet-différentiable sur un ensemble dense. A l'opposé, il n'existe pas sur l'espace $L^1([0,1];dx)$ de norme Fréchet-différentiable sur un ensemble dense qui soit réticulée, ni pour l'ordre usuel, ni pour aucun ordre (par la proposition 11). Notons qu'il existe des normes sur $L^1([0,1];dx)$ qui sont Fréchet-différentiable sur un ensemble dense, comme sur tout espace séparable.

Terminons par une *question*: Existe-il un espace de Banach réticulé, isométrique au dual d'un espace de Banach, et dont *aucun* prédual n'est réticulé ?

BIBLIOGRAPHIE

1. B. Beauzamy et B. Maurey, *Points minimaux et ensembles optimaux dans les espaces de Banach*, J. Funct. Anal. **24** (1977), 107–139.

2. E. Behrends, *M-structure and the Banach–Stone Theorem*, Lecture Notes in Mathematics n° 736, Springer-Verlag, 1979.

3. J. Bourgain, *Un espace jouissant de la propriété de Schur et de la propriété de Radon–Nikodym*, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle de l'Ecole Polytechnique, exposé n° 4, 1978/1979.

4. W. Davis, N. Ghoussoub and J. Lindenstrauss, *A lattice renorming theorem and applications to vector-valued processes*, to appear.

5. J. Dixmier, *Sur un théorème de Banach*, Duke Math. J. **15** (1948), 1057–1071.

6. G. Godefroy, *Points de Namioka, espaces normants, applications à la théorie isométrique de la dualité*, Isr. J. Math. **38** (1981), 209–220.

7. G. Godefroy, *Parties admissibles d'un espace de Banach, applications*, to appear.

8. G. Godefroy et M. Talagrand, *Nouvelles classes d'espaces de Banach à prédual unique*, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle de l'Ecole Polytechnique, exposé n° 6, 1980/1981.

9. A. Grothendieck, *Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L^1*, Can. J. Math. **7** (1955).

10. V. I. Gurarii, *Space of universal disposition, isotopic spaces and the Mazur problem on rotations of Banach spaces*, Sibirskii Mat-Zhurnal **7** (1966), 1002–1013.

11. R. C. James, *Uniformly non-square Banach spaces*, Ann. of Math. **80** (1964), 542–550.

12. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces*, Lecture Notes in Mathematics n° 338, Springer-Verlag, 1973.

13. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces*, Vol. II, *Function Spaces*, Springer-Verlag, 1979.

14. H. Lotz, *The Radon–Nikodym property in Banach lattices*, to appear.

15. J. C. B. Perrott, *Transfinite duals of Banach spaces and ergodic super-properties equivalent to super-reflexivity*, Q. J. Math. **30** (1979).

16. H. H. Schaeffer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Lecture Notes in Mathematics n° 215, Springer-Verlag, 1974.

17. M. Talagrand, *Dual Banach lattices and Banach lattices with the Radon–Nikodym property*, Isr. J. Math. **38** (1981), 46–50.

18. M. Talagrand, *La structure des espaces de Banach réticulés ayant la propriété de Radon–Nikodym*, Isr. J. Math. (1983), to appear.

EQUIPE D'ANALYSE — TOUR 46–0
UNIVERSITÉ PARIS VI
4 PLACE JUSSIEU
75230 — PARIS CEDEX 05, FRANCE